Rekenen voor de Toekomst
van rekenprocedures naar getalrelaties

Koeno Gravemeijer
Geek Bruin-Muurling

If computers do all the mathematics,

What should we do in mathematics education?

(Conrad Wolfram)

Werkgroep Wiskunde voor Morgen

Op welke reken-wiskundige doelen moeten we ons richten om leerlingen goed voor te bereiden op de maatschappij van de toekomst?

werkgroep Wiskunde voor Morgen
NVvW & NVORWO

Overview

- Onderzoek laat zien, dat het onderwijzen van geïsoleerde vaardigheden – zoals zich dit nu in de Nederlandse onderwijspraktijk voordoet – niet werkt.
- Voorbereiding op het werken met apparaten vraagt geen procedurele rekenvaardigheden, maar begrijpen, toepassen en (globaal) controleren
- In een op begrijpen gerichte leerlijn spelen getalrelaties een centrale rol

Deel 1

GEÏSOLEERDE VAARDIGHEDEN

Onderzoek naar rekenen in Nederland

- PPON-onderzoek
  - Achteruitgang bewerkingen, standaardprocedures
  - Verbetering getalbegrip, schattend rekenen
- Rekendiscussie
- Onderzoek
  - Aftrekken onder de 100 (Kraemer, 2011)
  - Vermenigvuldigen van breuken (Bruin-Muurling,2010)
  - Algebra (Stiphout, 2011)

Afrekken onder de 100
J-M. Kraemer (2011)

- Rijgen: Meest gebruikt, effectief, flexibel
  65 – 38 = …, via 65 – 30 = 35, 35 – 5 = 30, 30 – 3 = 27
- Splitsen: Veel onjuiste antwoorden
  68 – 45 = …; 60 – 40 = 20, 8 – 5 = 3, antw. 20 + 3 = 23
- Redeneren: Veel onjuiste antwoorden
- Beperkt inzicht in het omgaan met tientallen en eenheden & beperkt inzicht in relatie tussen optellen en aftrekken

De leerlingen ontwikkelden een beperkte set rekenmanieren en
bereikten een beperkt niveau van begrip.

Rekenmethoden

- In rekenmethoden
  - Focus op rijgen; procedure die werkt!
  - Weinig aandacht voor splitsen en redeneren in schoolboeken

Gevolg: Leerlingen ontwikkelen zelf manieren van splitsen en redeneren, zonder inzichtelijke basis

Rekenmethoden

Gerichtheid op routinematige oplossingsmanieren die juiste antwoorden produceren

Breuken vermenigvuldigen
(Geeke Bruin-Muurling, 2010)

3e klas VWO en HAVO (N = 347)

onderwerp	succesvol
Optellen en aftrekken niet-verwante noemers	Alleen de beste leerlingen
Vermenigvuldigingen als 4/7 van 35 euro, of 5 x 4 1/5	De helft van de leerlingen
Deelopgaven in context	De helft van de leerlingen
Kale deelopgaven	Een kwart van de leerlingen

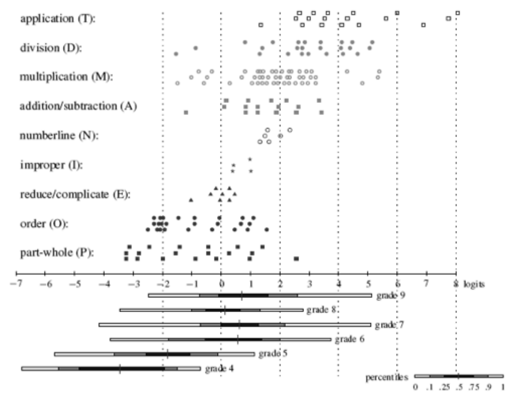


Figure 3.3: All items and students on the Rasch scale. Ordered by grade and subdomain. Items are marked based on a 0.8 probability of success.

Breuken vermenigvuldigen

- De leerlingen hadden geen inzicht in de onderliggende concepten, zoals
  - eenheid,
  - breuk als een getal,
- De leerlingen hadden geen inzicht in de relaties tussen breuken en de operaties vermenigvuldigen en delen

Breuken vermenigvuldigen

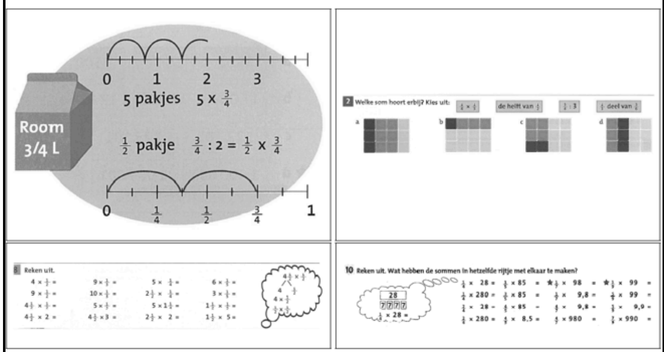
De leerlingen ontwikkelden een beperkte set taakspecifieke rekenmanieren en bereikten een beperkt niveau van begrip.

Basisschoolmethodes

- Start in methodes: betekenisvolle rekenmanieren, geworteld belevingswereld van leerlingen
- Dan, inoefenen getalspecifieke oplossingsmethoden

- 16 x ¾ ⇔16 pakjes van ¾ liter
  - ➢ herhaald optellen ¾ + ¾ + …
- ¾ x 16 ⇔ “¾ deel van16 kilogram”
  - → eerst delen door 4,
  - ➢ 16 : 4 = 4; 3 x 4 = 12

16			
4	4	4	4



Basisschoolmethodes

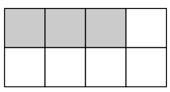
- Vervolgstap ontbreekt:
  - Waarom is 16 x ¾ gelijk aan ¾ of 16?
  - Waarom is ¾ + ¾ + … ¾ gelijk aan [16 ÷ 4=4] x 3?
- Leerlingen associeren breuken met maten, “liters”, “pizza’s”, … (benoemde getallen)
- De getallen zijn géén wiskundige objecten geworden

→ Problemen bij de overgang naar VO

Voortgezet onderwijs, nieuwe procedure

- Algemenen regel met onbenoemde getallen (wiskundige objecten)

$$\text{breuk x breuk} = \frac{\text{teller x teller}}{\text{noemer x noemer}}$$

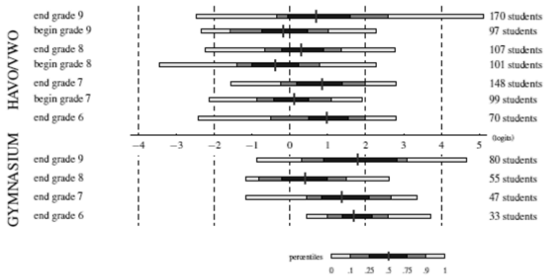


¾ x ½

plaatje als “bewijs”

“Nog een maniertje” → verwarring

Vaardigheid leerlingen in verschillende leerjaren VO



In grade 7 and 8, the school combines the HAVO and VWO streams. These streams are separated in grade 9. In our figure we combined the data of these streams to make comparison with grade 7 and 8 possible.

Figure 4.2: Distribution of students' ability per grade and stream in 2008 and 2009.

Breuken vermenigvuldigen, in schoolboeken

- Schoolboeken mikken op getalspecifieke oplosingsprocedures

Gerichtheid op routinematige oplossingsmanieren die juiste antwoorden produceren

Onderzoek naar rekenonderwijs in Nederland

De leerlingen ontwikkelden een beperkte set rekenmanieren en
bereikten een beperkt niveau van begrip.

Gerichtheid op routinematige, situatiespecifieke, oplossingsmanieren die juiste antwoorden produceren

Algebra vergelijkbaar (van Stiphout, 2011)

- Conceptual tasks difficult for secondary school students
- Tasks such as:
  If $a\sqrt{b} = 1 + 2a\sqrt{1 + b}$, then a = ..?

Grade 10, 0% correct
Grade 11, 1% correct
Grade 12, 1% correct

Algebra vergelijkbaar (van Stiphout, 2011))

- Conceptual tasks difficult for secondary school students
- Tasks such as:
  If $a\sqrt{b} = 1 + 2a\sqrt{1 + b}$, then a = ..?
  $\Leftrightarrow a\,Q = 1 + 2aP$

Grade 10, 0% correct
Grade 11, 1% correct
Grade 12, 1% correct

Algebra vergelijkbaar (van Stiphout, 2011)

- Solve: $(x - 5)(x + 2)(x - 3) = 0$

	2008	2009	
Grade 9,	4%	51%	correct
Grade 10,	29%	40%	correct
Grade 11,	37%	52%	correct
Grade 12,	47%	75%	correct

Algebra vergelijkbaar (van Stiphout, 2011)

De leerlingen ontwikkelden een beperkte set rekenmanieren en
bereikten een beperkt niveau van begrip.

Gerichtheid op routinematige, situatiespecifieke, oplossingsmanieren die juiste antwoorden produceren

25

Onderzoek naar rekenonderwijs in Nederland

'Task Propensity':
De neiging van leraren en schoolboekauteurs om over onderwijs te denken in termen van individuele opgaven, die door leerlingen moeten worden beheerst.

(Gravemeijer et al. (2016)

- Task propensity voor leerlingen: zo gericht op taakkenmerken dat ze niet uitzoomen en niet generaliseren.
- Hangt samen met het meten van vaardigheid via individuele toetsitems

26

Toetsing

– efficiënt rekenen (+, -, ×, :) gebruik makend van de eigenschappen van getallen en bewerkingen, met eenvoudige getallen
– optellen en aftrekken (waaronder ook verschil bepalen) met gehele getallen en eenvoudige decimale getallen:
235 + 349   1268 – 385   € 2,50 + € 1,25
– vermenigvuldigen van een getal met één cijfer met een getal met twee of drie cijfers:
7 × 165 = 5 uur werken voor € 5,75 per uur
– vermenigvuldigen van een getal van twee cijfers met een getal van twee cijfers: 35 × 67 =

Onderzoek naar rekenonderwijs in Nederland

Conclusie:

Het onderwijzen van geïsoleerde vaardigheden – zoals zich dit in de Nederlandse onderwijspraktijk voordoet (voordeed) - werkt niet.

28

Deel 2

REKENEN-WISKUNDE VOOR DE TOEKOMST

29

Digitale maatschappij

- Veranderingen in de maatschappij:
  - Werken met computers/apparaten
  - Door/met computers gegenereerde informatie
- Vaardigheden:
  - Minder procedurele vaardigheden nodig in beroep en maatschappij
  - Toegenomen belang van:
    - begrijpen
    - toepassen van reken-wiskundige kennis
    - interpreteren en reflecteren op uitkomst apparaten en software
    - kritisch wiskundig denken

30

Verandering in doelen

- 21st Century Skills
- Complexe toepassingssituaties
- Andere leerstofaccenten
  - Statistiek, variabelen & functies, 3D-meetkunde, …
- ICT
  - leren gebruiken, gebruiken om te leren
- Andere reken-wisk. vaardigheden

Complementariteit

Rekenen/wiskunde: niet richten op wat computers (beter) kunnen, maar op rekenen / wiskunde die aanvullend is

Als de computer het werk doet

1. *herkennen* van problemen die reken-wiskundig kunnen worden opgelost;
2. *vertalen* van een probleem in een reken-wiskundige bewerking, die met een computer kan worden uitgevoerd;
3. *begrijpen* wat deze bewerking inhoudt;
4. *interpreteren & controleren* van de antwoorden die de computer geeft.

Als de computer het werk doet

- *Modelleren*
- *Begrijpen*
- *Globaal controleren*

vandaag focus op:

1. *Globaal Rekenen*
2. *Begrijpen*

Globaal Rekenen

- 4 x 27
- ruim 4 x 25 = 100
- minder is dan 4 x 30 = 120
- twee keer 54 = 108
- Getalrelaties:

bijvoorbeeld veelvouden van 25, 75, 125 etc. ⇔ kommagetallen, breuken en procenten.

- Verschillende oplossingswegen

  4 x 1,25 = 5 ⇔ 4 x 25 = 100 → 4 x 125 = 500

  of 4 x 1,25 = 4 x 1¼ = 5
- Zekerheid

Netwerken van getalrelaties t.b.v. globaal rekenen

Voorbeelden

- getalrelaties, waarvan 25 de spil vormt:
  - veelvouden van 25 en van 125,
  - relaties met 1/2, 1/4 en 1/8.
  - gecombineerd met machten van 10
- getalrelaties rond 24
  - vermenigvuldigingen die 24 als uitkomst hebben
  - zoals 3 x 8, 4 x 6, 2 x 12 en 8 x 3, 6 x 4, 12 x 2, en ook 2 x 3 x 4 = 24 en 2 x 2 x 2 x 3 x = 24)
  - veelvouden van 12.

Deel 3

GETALRELATIES EN PROCES-OBJECT OVERGANGEN

Verandering

- Rekenen: van procedures naar netwerken van (getal)relaties
- Conceptuele leerlijnen
- Ontwikkelen van wiskundige objecten met een duale betekenis: proces & object

Begrijpen

Conceptuele leerlijnen
Proces - object

Proces-object

- Abstracte begrippen zijn resultaat van een langlopend constructieproces, in dat proces kun je niet zomaar stappen overslaan → Noodzaak v.e. groeiproces:
- Ontstaansgeschiedenis van de wiskunde: **Processen worden objecten, die zelf weer onderdeel van nieuwe processen worden**

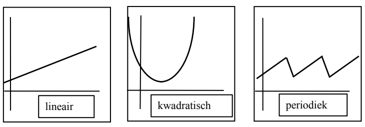
Sfard (1991)

Algebraïsche functies

- Betekenis op procesniveau: rekenvoorschrift: $y=2x+3$
  "eerst keer twee, dan drie erbij"

Aandacht verschuift naar samenhang tussen invoer en uitvoer →

- Betekenis op objectniveau: functies als objecten met kenmerken, bijv.
  - lineair
  - kwadratisch
  - periodiek



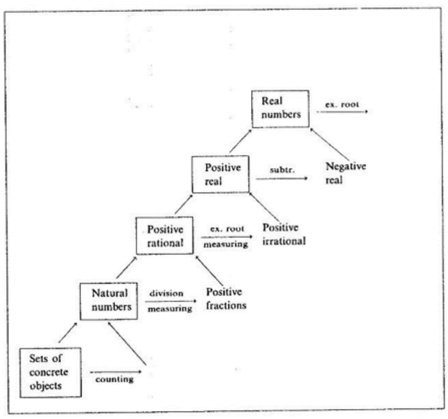


Fig. 3. Development of the concept of number.

Proces-object

Getallen

- Jonge kinderen begrijpen de vraag:
  "Hoeveel is 4+4?" niet
  Terwijl ze wel weten dat
  "4 appels en 4 appels samen 8 appels zijn"
- Getallen gekoppeld aan telbare objecten:
  "vier appels",
  "vier kinderen",
  "vier knikkers", …

Proces-object

Getallen

- Op een hoger niveau is 4 een wiskundig object dat zijn betekenis ontleent aan een netwerk van getalrelaties (Van Hiele):

  4 = 2+2 = 3+1 = 5-1 = 8:2

  Via processen: splitsen, samenvoegen, vergelijken, …

"Tientallen en eenheden"

- Jonge leerlingen zien "tien" aanvankelijk als òf één tien, òf tien eenheden
- Tientallige getalrelaties:

  63 = 6 x 10 + 3   63 = 60 + 3
  63 = 50 + 13   63 = 70 – 7 , …
  60 + 3 = 63 , …
- Ervaring met activiteiten als tientallig groeperen, inpakken, uitpakken, tellen, vergelijken → één tien en tien eenheden als één ding zien (object).

Som en verschil als objecten

- Flexibel structureren en combineren, leiden ertoe dat som en verschil mentale objecten worden:

  "65+17 is tien meer dan 65+7"

  bereidt voor op algebra:
  (2x+17)-(2x+7) = ..

Vermenigvuldigen van twee-cijferige getallen

- Inzicht in het tientallig positiestelsel en eigenschapsrekenen zijn voldoende voor eenvoudige vermenigvuldigingen.
- 23 x 45 → distributieve eigenschap

  23 x 45 =
  = 20x45 + 3x45 =
  = 20x40+20x5 + 3x40+3x5

Breuken

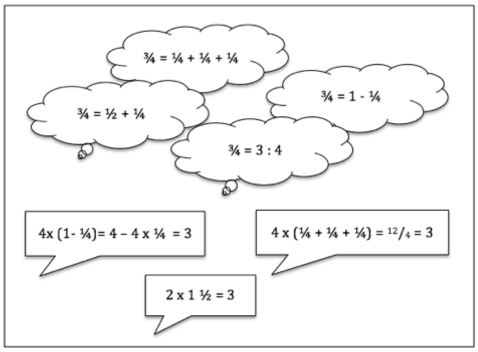
- Betekenis op <u>procesniveau</u>:
  ¾ → in 4 stukjes verdelen en 3 stukjes nemen

  Van benoemde breuken (pizza's, kilometers, …), naar onbenoemde breuken
- Betekenis op <u>objectniveau</u>; getalrelaties:
  ¾ = 3 x ¼
  ¾ = ½ + ¼
  ¾ + ¼ = 1
  ¾ + ¾ = 1 ½
  enz.

Breuken

- Opbouwen van een relatienet met breuken die noemer 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 of 12 hebben

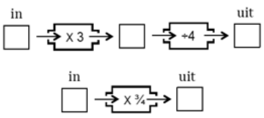
Gebruik van getalrelaties, 4 x ¾



Breuken, dualiteit

- Proces ¾ ⇔ 4 ÷ 3 & object ¾ ⇔ getalrelaties
- Tweezijdige betekenis proces en object moet leiden tot flexibel kunnen wisselen van betekenissen bij het vermenigvuldigen van breuken

Bijvoorbeeld: "… x ¾", is gelijk aan "[… x 3] ÷ 4"



Vermenigvuldigen van breuken

- Gemakkelijk kunnen wisselen tussen gelijkwaardige interpretaties:

15 x ¾ = 15 x (3 ÷ 4)
15 x ¾ = 15 x 3 x ¼ =
= 15 x ¼ x 3 =
= (15 ÷ 4) x 3
15 x ¾ = (15 x 3) x ¼ =
= (15 x 3) ÷ 4

Terug kunnen naar concrete betekenis

Deel 4

CONCLUSIE

Conclusie

- Gerichtheid op geïsoleerde vaardigheden (Task propensity → tegenvallende resultaten)
- Toekomst: Voorbereiding op het werken met apparaten vraagt begrijpen, toepassen en (globaal) controleren
- In een op begrijpen gerichte doorgaande leerlijn spelen proces-objectovergangen een centrale rol; objectvorming ⇔ netwerken van getalrelaties
- Netwerken van getalrelaties zijn veelal voldoende wanneer we grote getallen aan de computer overlaten

DANK U